Groepsopdrachten bij de Module Constructies

Bij de Module Constructies met Passer en Liniaal, Origami en Meccano wordt 33% van het eindcijfer bepaald door de huiswerkopdrachten en 67% door de groepsopdracht.

## Algemeen

De groepsopdrachten worden uitgevoerd in groepjes van 3 leerlingen die willekeurig worden samengesteld door de docent. De taken en verantwoordelijkheden worden binnen het groepje evenredig verdeeld en vastgelegd in een **werkplan**. Dat betekent niet dat een groepslid een onderdeel alleen moet doen, maar wel dat hij of zij in de gaten houdt dat dit onderdeel goed gebeurt en hierop aanspreekbaar is.

Je krijgt een begeleider toegewezen die je kan helpen met vragen, maak hier gebruik van. Daarnaast kun je tijdens de korte presentaties gebruik maken van kennis en feedback van medeleerlingen uit andere groepjes.

## Korte presentaties

Alle groepjes wijzen één groepslid aan die gaat "stelen en delen". Dat betekent dat dit groepslid een korte presentatie houdt van ongeveer 5 minuten over het eigen onderwerp. Hierbij wordt in ieder geval uitgelegd:

* Wat het centrale probleem is waar jullie aan hebben gewerkt.
* Wat de belangrijkste ideeën zijn die jullie hebben gehad.
* Hoe ver jullie tot nu zijn gekomen en met welke vragen jullie nog zitten.

## Tijdschema

Er zijn drie bijeenkomsten waarin aan de opdracht onder begeleiding kan worden gewerkt:

* **bijeenkomst 1:** de groepjes worden gevormd, het onderwerp wordt gekozen en het startdocument wordt ingevuld en ingeleverd bij de begeleider. Er wordt een begin gemaakt met de opdracht.
* **bijeenkomst 2:** tijdens de eerste anderhalf uur wordt onder begeleiding gewerkt aan de opdracht. Tijdens het laatste uur wordt zelfstandig verder gewerkt. Er wordt in ieder geval voor gezorgd dat tijdens de volgende bijeenkomst een groepslid een korte presentatie kan geven van de bevindingen tot dusver.
* **bijeenkomst 3:** tijdens het eerste uur geeft één groepslid een korte presentatie terwijl de anderen doorwerken aan het verslag. Na het eerste uur doet dit groepslid verslag van de presentatie en de feedback / hulp die is ontvangen. Eindafspraken voor het afronden van het verslag worden gemaakt.
* **deadline:** dit is de datum waarop het verslag uiterlijk wordt ingeleverd.

## Verslag

Het verslag is een op zichzelf staande en goed leesbare tekst, beknopt geschreven in goed Nederlands. Dus geen lange verhalen maar ook geen telegramstijl.

Het verslag dient er netjes uit te zien: bij elkaar gehouden met nietjes of in een binder, en getypt of netjes geschreven op A4-formaat.

Op het voorblad van het verslag staat eventueel een plaatje en in ieder geval de volgende informatie:

* Titel
* Auteursnamen
* Omschrijving of nummer v/d opdracht
* Datum
* Naam v/d begeleider

Het verslag bestaat vervolgens uit de volgende onderdelen:

### Inhoudsopgave

Vergeet niet de paginanummers te vermelden, in Word kan dit automatisch worden gedaan.

### Voorwoord

In het voorwoord kun je uitleggen waarom jij voor dit onderzoek hebt gekozen, en wat je ervan vindt. Dit is ook de plaats om mensen te bedanken voor hun bijdrage aan je onderzoek.

### Inleiding

De inleiding bestaat uit drie onderdelen.

Ten eerste wordt kort uitgelegd wat het hoofdonderwerp is en hoe het samenhangt met de rest van de module zoals beschreven in het diktaat.

Vervolgens dient in de inleiding in elk geval de onderzoeksvraag, dan wel de hoofd- en deelvragen te worden vermeld.

Tenslotte beschrijf je in de inleiding de opzet van het verslag: op welke manier is het verslag opgebouwd, waar vindt de lezer het antwoord op welke vragen?

### Theorie en methode

Beschrijf kort jullie plan van aanpak en de keuzes die daarbij zijn gemaakt. Geef ook aan waar jullie eventueel zijn afgeweken van de oorspronkelijke planning en waarom. Beschrijf de algemene theorie die nodig is om de onderzoeksvraag aan te pakken. Maak in het verslag duidelijk wat de algemene theorie is en welke aspecten specifiek horen bij jullie onderzoek. Bij elk besproken onderwerp verwijs je naar de bronnenlijst achterin het verslag. Als je theorie of berekeningen (gedeeltelijk) zelf hebt verzonnen is het belangrijk om dat ook expliciet te vermelden, zodat jullie eigen bijdrage duidelijk is.

Bronnen gebruiken zonder vermelding en doen alsof je het zelf hebt verzonnen heet plagiaat en staat gelijk aan fraude.

### Resultaten

Hier komen de berekeningen en / of de toepassing van de algemene theorie op jullie specifieke onderzoeksvraag.

### Discussie en conclusie

Hier komt de beantwoording van de onderzoeksvraag en eventuele deelvragen (de conclusie van jullie onderzoek). Daarnaast komt hier een bespreking van de betrouwbaarheid van de conclusie: weet je het zeker of is het nog een vermoeden? Vervolgens worden mogelijkheden voor een vervolgonderzoek geschetst met de verwachte mogelijke uitkomsten daarvan. Ten slotte volgt een discussie over wat goed en minder goed ging tijdens het onderzoek.

### Bronvermelding

Hier komen alle geraadpleegde bronnen te staan. Vaak zal dit in ieder geval het diktaat en de aangereikte literatuur zijn. Daarnaast heb je misschien nog zelf bronnen gevonden, eventueel via internet.

Van bronnen vermeld je in ieder geval de auteur, titel, jaartal en tijdschrift of boek. Van internetbronnen vermeld je voor zover bekend de auteur en in ieder geval de volledige URL.

### Nawoord

*(eventueel)*

Als je wilt -of als je docent daarom vraagt- voeg je in een nawoord nog een eigen mening toe. Wat vond je van het onderzoek, wat heb je ervan geleerd? Hoe verliep de samenwerking? Wat zou jij de volgende keer anders doen, of wat zou de docent de volgende keer anders kunnen doen.

## Beoordeling

De beoordeling van het verslag gebeurt op basis van onderstaande rubric.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Lay-out en leesbaarheid**  **max. 20 punten** | *Het verslag is getypt of netjes geschreven met de gevraagde indeling.* | *..en de wiskundige formules zijn netjes weergegeven, bijv. via de formule editor van Word.* | *..en de plaatjes en/of tabellen zijn genummerd, overzichtelijk en functioneel.* | *..en er is een volledige bronnenlijst met voldoende informatie zoals jaartallen, uitgevers, volledige URL.* |
| +5 | +5 | +5 | +5 |
| **Verslag van het onderzoek**  **max. 20 punten** | *Er is een duidelijke onderzoeksvraag, eventueel met deelvragen indien van toepassing.* | *..en er is een duidelijk en logisch plan van aanpak.*  *Alternatieve aanpakken worden beschreven.* | *..en er is een duidelijke conclusie en de betrouwbaarheid van deze conclusie wordt correct beschreven.* | *..en er is tenminste één onderzoeksvraag die zou kunnen horen bij een mogelijk vervolgonderzoek.* |
| +5 | +5 | +5 | +5 |
| **Wiskundige inhoud**  **max. 40 punten** | *De gebruikte wiskunde klopt en past bij de onderzoeksvraag.* | *..en de theorie en berekeningen worden zo kort en overzichtelijk mogelijk gepresenteerd.* | *..en er wordt duidelijk onderscheid gemaakt tussen algemene theorie enerzijds en de betekenis voor de specifieke onderzoeksvraag anderzijds.* | *..en er wordt duidelijk onderscheid gemaakt tussen vermoedens en bewijzen.* |
| +20 | +10 | +5 | +5 |
| **Eigen bijdrage**  **max. 20 punten** | *Het is duidelijk welke informatie uit de bronnen komt en wat jullie eigen bijdrage is.* | *..en er is bruikbare informatie gevonden naast de aangeboden bronnen. Deze info*  *kan ook van andere groepjes komen.* | *..en er zijn originele en functionele eigen bijdragen geleverd. Deze hoeven niet per se wiskundig van aard te zijn.* |
| +5 | +5 | +10 |
| **Totaal max. 100 punten** |  |

# Mogelijke groepsopdrachten

Opdracht 1: Constructies met lucifers

In deze opdracht bekijk je een nieuwe constructiemethode: lucifers.

Er zijn veel wiskundige puzzeltjes over figuren die je met lucifers kunt maken, zoals bijvoorbeeld de volgende puzzeltjes uit de "The Moscow Puzzles: 359 mathematical recreations" die je zelf eens kunt proberen:

1. *Er zijn 3 lucifers nodig voor een gelijkzijdige driehoek. Maak met 12 lucifers 6 gelijkzijdige driehoeken, ieder met 1 lucifer als zijde. Verplaats in de ontstane figuur 4 lucifers zodat je 3 gelijkzijdige driehoeken overhoudt, die niet allemaal even groot zijn.*
2. *Plaats 2 lucifers kop-staart zodat ze in elkaars verlengde liggen. Bewijs dat dit zo is (hiervoor zijn meer lucifers nodig, je mag er zoveel gebruiken als je wilt).*

In deze opdracht onderzoek je de mogelijkheden van lucifers als wiskundige constructiemethode. Je bekijkt dus de spelregels en basisconstructies, en je vergelijkt dit met de constructies met passer en liniaal. Kan de meetkundige rekenmachine worden gemaakt? Als tekst gebruik je een hoofdstuk uit het boek "Geometric Constructions" van George Martin. Ook de webpagina

http://www.cim.mcgill.ca/~pdimit/cs507/webpage/text.html

kan van pas komen, hierop is een applet te vinden waarmee je luciferconstructies kunt maken voor het verslag.

Als je op zoek bent naar onderwerpen voor een originele bijdrage of vervolgonderzoek kun je kijken naar rigiditeit van zulke constructies, zie bijvoorbeeld

http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0100.html

Daarover kun je ook eventueel overleggen met een groepje dat werkt aan meccanoconstructies en hun rigiditeit. Er zijn ook nog bronnen zoals

http://mathworld.wolfram.com/Heptagon.html

die beweren dat een regelmatige zevenhoek kan worden geconstrueerd met behulp van lucifers. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de kangoeroesprongen die je zelf voor een huiswerkopgave uit het diktaat hebt bekeken. Je kunt via de rigiditeitstelling van Laman onderzoeken of deze regelmatige zevenhoek wel rigide is..

Opdracht 2: Liniaal en roestige passer

Stel je voor dat je passer niet meer open en dicht kan. De passerpunten hebben dus een vaste afstand, laten we voor het gemak zeggen afstand 1. Wat kun je nu nog construeren? Je beschrijft in deze opdracht de nieuwe spelregels en onderzoekt of de basisconstructies en meetkundige rekenmachine nog kunnen worden gemaakt. Kun je uiteindelijk meer of minder construeren dan met de gewone passer en liniaal? Je gebruikt hierbij als bron een hoofdstuk uit het boek "Geometric Constructions" van George Martin.

Voor de originele bijdrage kun je bijvoorbeeld denken aan eigen constructies die afwijken van de constructies zoals Martin ze geeft, of een vergelijking tussen liniaal en gewone passer en de roestige passer wat betreft het minimaal aantal constructiestappen dat nodig is voor de basisconstructies. Zie hiervoor ook de opgaven uit hoofdstuk 2 van het boek "Geometry: Euclid and Beyond" van Robin Hartshorne.

Ten slotte levert een zoektocht op internet met de zoekterm "ruler and rusty compass" ook nog het een en ander op. Maar verlies je niet in alle informatie die je tegenkomt!

Opdracht 3: Regelmatige veelhoeken met alle constructiemethoden

In deze opdracht gebruik je de verschillende constructiemethoden (passer en liniaal, origami en meccano) om regelmatige veelhoeken te maken. Je voert deze constructies ook uit en documenteert ze, in ieder geval voor de regelmatige vijfhoek (passer en liniaal, origami, meccano), negenhoek (origami, meccano) en zeventienhoek (passer en liniaal in geogebra) en je legt uit waarom ze werken. Je kunt hierbij gebruik maken van het materiaal dat tijdens de module is verstrekt, met name de werkbladen over geogebra, meccano en origami. Daarnaast kun je voor de origami het boek "Geometric Origami" van Geretschläger gebruiken. Bij de meccano constructies besteed je aandacht aan de rigiditeit en leg je uit dat iedere regelmatige veelhoeken hiermee construeerbaar is. Hierbij kan het artikel "Meccano Math I" van Gerard 't Hooft bruikbaar zijn.

Overleg met groepjes die werken aan opdracht 6 is mogelijk: als je begrijpt waarom driedeling van een hoek van 60 graden met passer en liniaal onmogelijk is, kun je ook uitleggen waarom een regelmatige negenhoek niet construeerbaar is.

Daarnaast zoek je bijvoorbeeld contact met een groepje dat werkt aan luciferconstructies (opdracht 1), of als zo'n groepje er niet is de roestige passer (opdracht 2). Je gebruikt één van deze alternatieve constructiemethoden om een paar regelmatige veelhoeken mee te maken (dat zou al een originele bijdrage kunnen zijn).

Opdracht 4: Regelmatige veelhoeken en complexe getallen

Dit is een mooie, maar wiskundig lastige opdracht. Enige voorkennis over complexe getallen is aanbevolen. Vraag ook veel hulp aan je begeleider.

De vraag is simpel: welke regelmatige veelhoeken zijn construeerbaar met passer en liniaal?

Tijdens de module is deze vraag nooit echt beantwoord, en we proberen in deze eindopdracht wat verder te komen met ons begrip.

Allereerst lees je het artikel "On regular polygons, Euler's function, and Fermat numbers" van Kirillov. Hierin spelen complexe getallen nog geen enkele rol. Dan ga je door waar Kirillov stopt, allereerst door complexe getallen, de formule van de Moivre en de oplossingen van de vergelijking te bestuderen. Dit kan bijvoorbeeld uit een middelbare schoolmethode voor Wiskunde D. Met deze kennis kun je opgave 17.12 maken uit het boek "Algebra" van Martinus Riemersma over veelhoeken en complexe getallen waaruit blijkt dat de regelmatige zevenhoek niet construeerbaar is.

Ten slotte kun je nog verder de diepte in, bijvoorbeeld door het bestuderen van een origineel artikel uit 1897 door de beroemde wiskundige Felix Klein. Hierin legt hij het verband tussen regelmatige veelhoeken, complexe getallen en Euler's functie (zie ook het artikel van Kirillov). De vraag welke regelmatige veelhoeken construeerbaar zijn kent daarna geen geheimen meer.

Opdracht 5: Origami axioma's

Tijdens de lessen hebben we aandacht besteed aan de axioma's O1 t/m O7 voor Origami constructies. In deze opdracht ga je daar wat dieper op in en probeer je na te gaan of je met Origami echt meer kunt construeren dan met Passer en Liniaal (we weten inmiddels dat je met Origami in ieder geval een willekeurige hoek in drieën kunt vouwen). Als dat zo is, dan moet je dus iedere passer en liniaalconstructie kunnen maken met origami. Als bron hierbij gebruik je een tekst die door de begeleider wordt uitgereikt.

Als extra verdiepingen kun je in overleg met je begeleider bijvoorbeeld kiezen uit het beschrijven

* onder welke voorwaarden de Origami axioma's uitvoerbaar zijn (er moeten bepaalde afstanden zijn tussen de punten en de lijnen).
* wat de relatie is tussen axioma *O6* en derdegraadsvergelijkingen, zie hiervoor een hoofdstuk uit het boek "Geometric Origami" van Robert Geretschläger. Er is overleg mogelijk met groepjes die werken aan opdracht 6.
* wat inversiemeetkunde en haar rol binnen vlakke meetkunde is.
* waarom er eigenlijk maar één "oeraxioma" is voor Origami, waarvan de andere axioma's speciale gevallen zijn.

Opdracht 6: Origami en derdegraadsvergelijkingen

In deze opdracht bewijs je eerst dat driedeling van een willekeurige hoek met passer en liniaal onmogelijk is. Het bewijs lijkt veel op die van de onmogelijkheid van verdubbeling van de kubus. Als bron hiervoor gebruik je een korte aanvulling op het diktaat dat door de begeleider wordt uitgereikt.

Daarna beschrijf je de driedeling van een hoek met origami en de rol van axioma *O6*, waarmee je aantoont dat er een verband bestaat tussen dit axioma en derdegraadsvergelijkingen. Ten slotte bestudeer je de meetkundige methode van Lill om derdegraadsvergelijkingen op te lossen en de toepassing van deze methode op Origami zoals beschreven door Margharita Beloch.

Bron: "Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill" van Robert Hull. Geef illustraties van deze methode.

Er is overleg mogelijk met groepjes die werken aan opdracht 5.

Als extra verdieping kun je nadenken over bijvoorbeeld vijfdeling van een hoek: kun je via goniometrische formules een vergelijking vinden die je zou moeten oplossen? En kun je via invullen van een oplossing van de vorm tot een tegenspraak komen? Werkt de methode van Lill voor dit soort hogere graads vergelijkingen? Via de wikipedia-site van "Lill's method" kun je ook veel informatie vinden..

Opdracht 7: Goochelen met Origami

De beroemde goochelaar Harry Houdini (echte naam Ehrich Weiss) schreef in 1922 het boek "Houdini's paper magic". Hierin beschreef hij onder andere een truc waarmee hij elke gewenste figuur uit een vel papier kon knippen met maar één knip, door eerst het papier op een bepaalde manier te vouwen. Houdini gaf maar een enkel voorbeeld, zonder al te veel details. Jaren lang bleef de vraag open of je daadwerkelijk iedere gewenste vorm op deze manier kunt krijgen, totdat de vraag uiteindelijk bevestigend werd beantwoord door Bern, Demaine, Epstein en Hayes in hun artikel "Disc packing algorithm for an origami magic trick".

Het doel van deze eindopdracht is om uit te leggen wat er in dit artikel staat en de methode te demonstreren aan de hand van een paar voorbeelden.

Om je op weg te helpen met de concrete voorbeelden: een aantal uitdagingen voor één-knip-origami:

*http://mrhonner.com/fun-with-folding/*

Een zwaan verkrijgbaar met één knip:

*http://www.nytimes.com/imagepages/2005/02/14/science/20050205\_ORIG\_GRAPHIC.html*

**Tips voor het lezen van het artikel "Disc packing algorithm for an origami magic trick":**

Dit is een lastig artikel met veel informatie in het engels. Om de rode draad van het artikel te ontdekken kun je antwoorden zoeken op de volgende vragen:

1. In paragraaf 2 worden de zijden van de veelhoek (polygon) bedekt met cirkels, op zo'n manier dat de veelhoek kan worden opgesplitst en driehoeken en vierhoeken. Wat is het algoritme om dat te doen?
2. In paragraaf 3: voor iedere driehoek wordt er gevouwen langs bissectrices en raaklijnen aan cirkels. Waarom? En wat is het resultaat? Kun je dat bewijzen?
3. In paragraaf 3: voor iedere vierhoek wordt er gevouwen langs bissectrices en raaklijnen aan cirkels. Wat kan er misgaan en hoe los je dat op? Zie ook figuur 3 in het artikel.
4. In paragraaf 4: welke rol spelen de cirkels als het gaat om het "aan elkaar plakken" van de gevouwen driehoeken en vierhoeken? Hoe weet je zeker dat alle zijden van de veelhoek op één lijn komen te liggen?

Opdracht 8: Tekenen met meccano

Al sinds mensenheugenis worden tekeninstrumenten gemaakt om krommen mee te tekenen, zoals lijnen, cirkels, ellipsen, hyperbolen etcetera. In deze opdracht ga je aan de slag met twee bronnen die zogenaamde *stangenconstructies* (engels: linkages) gebruiken als tekeninstrument. Enerzijds is dat een artikel uit 1877 van de Engelse amateurwiskundige Arthur Kempe met de uitdagende titel "How to draw a straight line", anderzijds een recent overzichtsartikel "Historical Mechanisms for Drawing Curves" van Daina Taimina. Welke constructies je uiteindelijk precies gaat maken beslis je in overleg met je begeleider.

Er zijn bij deze opdracht de volgende wiskundige aandachtspunten:

* je beschrijft de (non)rigiditeit van de tekeninstrumenten, met andere woorden je bewijst met behulp van de stelling van Laman dat ze bewegingsvrijheid hebben.
* je beschrijft tenminste de Peaucellier linkage waarmee je een rechte lijn kunt construeren.
* van ieder tekeninstrument bewijs je wiskundig dat hij tekent wat hij moet tekenen.