

# Problemen oplossen én uitleggen

3 september 2009

## Inleiding

Wiskunde is overal om ons heen. Als je een alledaags probleem tegenkomt waarbij je logisch moet nadenken, ben je vaak met niets anders dan wiskunde bezig. En ook de meeste raadsels zitten vol met verborgen wiskunde.

In deze wiskunde D module werk je in het begin met je klasgenoten samen aan zulk soort wiskundige problemen. Daarbij letten we er niet alleen op hoe je te werk zou kunnen gaan met het probleemoplossen, maar kijken we ook hoe je anderen met het oplossen van problemen kan helpen.

Uiteindelijk gaat iedereen zelf op zoek naar zijn of haar favoriete raadsel. De slotbijeenkomst wordt georganiseerd op Hogeschool Utrecht samen met een andere wiskunde D havo4 klas. Je zult dan zelf je wiskundig raadsel opgeven aan de rest van de groep. Daarbij help jij de andere deelnemers alsof jij de leraar bent (zonder de oplossing te verklappen natuurlijk!), en tenslotte bespreek jij jouw opgave na met de groep. Na afloop krijg je feedback over hoe je het deed als “leraar”.

**Beoordeling:** op grond van wekelijks inleverwerk en de presentatie.

**Studiebelasting:** 40 SLU

## Literatuur/bronnen

- Tijdschrift Pythagoras ([www.pythagoras.nu/mmmcms/public](http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public))
- Kangoeroewedstrijd ([www.math.kun.nl/kangoeroe](http://www.math.kun.nl/kangoeroe))
- Wiskunde Olympiade ([www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl))
- Vierkant voor Wiskunde ([www.vierkantvoorwiskunde.nl](http://www.vierkantvoorwiskunde.nl))

# Week 1: Raadsels en problemen oplossen

Het gaat niet alleen om het oplossen, maar ook om het nadenken over het oplossen.

- Les 1: Inleiding. Opdracht 1. Verschillende manieren van aanpak.
- Les 2: Het schaakbordprobleem: opdracht 2. Een open probleem, want je weet nog niet of het wel gaat lukken; zoeken naar een oplossing en tegelijk zoeken naar een bewijs dat het niet kan. Hilberts tiende probleem.
- Les 3: Huisjes: opdracht 3. Voor elkaar een huisjesopdracht maken. Óf je ziet een oplossing, óf je moet *bewijzen* dat er geen oplossing is.
- Om over na te denken voor les 4: opdracht 4.

## Dossieropdracht A

*(bij aanvang van les 4 inleveren op papier; telt mee in beoordeling)*

- a) Verzamel in en buiten de les (bijv. op internet of in het tijdschrift Pythagoras) een drietal leuke wiskundige raadseltjes. Maak er een handig overzicht van. Rangschik ze van makkelijk naar moeilijk. Schrijf er ook een uitleg en antwoord/oplossing bij.
- b) Probeer één van de raadseltjes uit op één van je ouders, je zus, broer, een vriend of vriendin. Beschrijf hoe het ging: lukte het hem/haar om het raadseltje op te lossen, op welke momenten vond hij/zij het leuk of minder leuk, gaf jij hulp en zo ja, hoe?

## Week 2: Theorie over probleemaanpak (Polya)

- Les 4: Bespreken opdracht 4. Het wijnflessenprobleem, opdracht 5. Blikwisseling: Ga je lastig met breuken rekenen of kun je er ook op een andere manier naar kijken?
- Huiswerk voor les 5: het hekkenprobleem, opdracht 6(a).
- Les 5: Het hekkenprobleem, opdracht 6. Theorie over probleemaanpak (4 fases van Polya).
- Les 6 (beamer): Het getallenmysterie, opdrachten 7 en 8. Algoritmen (vindregels) en heuristieken (zoekregels). Bespreken van strategieën.

### Huiswerk voor les 7

*(in tweetallen; je docent zorgt voor een aantal wiskundeboeken (of kopietjes) uit voorgaande jaren)*

Kijk nog eens terug in een wiskundeboek uit de tweede of derde. (Als je dat niet meer hebt, staat er vast wel een exemplaar bij jou op school in de mediatheek.) Probeer twee opgaven te vinden waar leerlingen echt een probleem moeten oplossen. Dus opgaven waarbij ze niet met een regeltje direct het antwoord kunnen vinden. Kopieer ze en neem ze mee voor de volgende les. Bedenk hoe je leerlingen die nu in die klas zitten zou kunnen helpen met die opgaven. We bespreken dit de volgende les.

### De vier fases volgens Polya

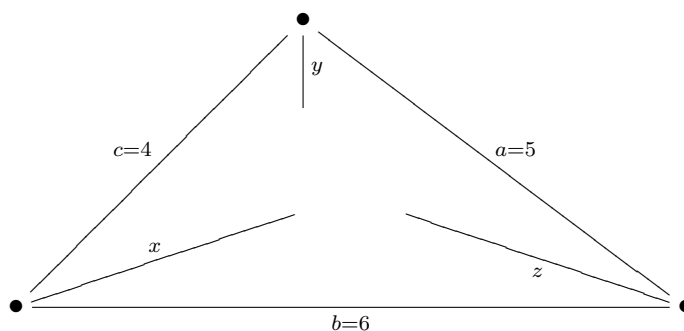
1. Het probleem begrijpen: Wat is het probleem? Wat is er gegeven? Wat wordt er precies gevraagd? Wat is een handige notatie?
2. Een plan maken: Wat kun je doen? Ken je een soortgelijk probleem?
3. Een plan uitvoeren: Doe het!
4. Terugblikken: Wat deed ik precies? Kon je niet van bepaalde vermoedens loskomen (fixering)? Kon je de zaak vanuit een andere invalshoek bekijken (blikwisseling)? Controleer of je berekeningen kloppen. Kijk of je kunt generaliseren. Wat heb je geleerd?

## Voorbeeld 2 kolommen

### Opgave

Een kudde schapen wordt regelmatig verplaatst tussen stal, heide en bron. De weg naar de heide is 6 meter breed, de weg naar de bron 5 meter en de weg naar de stal 4 meter. Op een driesprong ontmoeten deze wegen elkaar. Elke weg kan met twee scharnierende hekken worden afgesloten.

Hoe groot moet elk van de drie hekken zijn, zodat elk tweetal hekken één weg kan afsluiten? Los het probleem ook op voor een willekeurige driesprong (als de wegen  $a$  meter,  $b$  meter en  $c$  meter breed zijn).



WAT IS HET PROBLEEM?	De breedtes van de wegen zijn gegeven, in eerste instantie 4, 5 en 6 meter. Daarbij moeten wij bedenken hoe groot de hekken moeten zijn. Het is waarschijnlijk de bedoeling dat de twee hekken aan weerskanten van een weg in totaal precies even breed zijn als de weg. Maar misschien mogen ze ook wel overlappen; dat is niet duidelijk uit de probleemstelling. Als er maar geen gaatje overblijft zodat een schaap kan ontsnappen.
Wat is er gegeven? (notatie)	De breedtes van de verschillende wegen. Laten we deze in het algemeen $a$ , $b$ en $c$ noemen.
Wat wil je weten? (notatie)	Hoe groot de hekken moeten zijn. Laten we hier de volgende notatie voor gebruiken: $x$ voor het hek tegenover weg $a$ ; $y$ voor het hek tegenover weg $b$ ; en $z$ voor het hek tegenover weg $c$ (zie ook de figuur).
Even wat proberen	We maken eerst maar eens een tekening van de situatie in het geval de breedtes 4, 5 en 6 meter zijn. Als we $x = 1$ kiezen, dan moet wel $y = 3$ (want dat samen 4 dus dan kan weg $c$ worden afgesloten) en dus $z = 2$ (samen 5, goed voor afsluiten van weg $a$ ). Maar nu sluiten hek $x$ en $z$ samen niet weg $b$ af; er zit nog een gat van 3 meter.
Nog wat proberen	Als we hek $x$ een decimeter groter maken, dan wordt $y$ een decimeter kleiner en dan wordt $z$ juist weer een decimeter groter. Dus dan wordt het gat van 3 meter maar liefst 2 decimeter kleiner.
Ontdekkinkje	Als we datzelfde geintje uithalen met een andere afstand dan een decimeter werkt het ook.
Oplossing van het voorbeeld	We gaan onze eerste poging aanpassen door bij $x$ de helft van dat gat van 3 meter erbij op te tellen en kijken of het dan wel werkt. We nemen dus $x = 2\frac{1}{2}$ , dan moet wel $y = 1\frac{1}{2}$ (samen 4), dan moet wel $z = 3\frac{1}{2}$ (samen 5). En inderdaad: nu is $2\frac{1}{2}$ en $3\frac{1}{2}$ precies groot genoeg om samen de weg van breedte 6 af te sluiten

WAT KUN JE GAAN DOEN?	Vanuit $x$ berekenen we $y$ en daarna ook $z$ . En dan kijken we of $x + z$ wel precies de derde weg afsluit. Als het niet meteen lukt, kunnen we het ook eerst met een voorbeeld doen.
DOE HET! Eerst maar een voorbeeldje	Om weg $c = 4$ af te sluiten moet gelden dat $y = 4 - x$ . Om vervolgens weg $a = 5$ af te sluiten moet dan gelden dat $z = 5 - y = 5 - (4 - x) = 5 - 4 + x = 1 + x$ . Maar sluiten $x$ en $z$ nu wel weg $b = 6$ af? Dan moet $1 + x \stackrel{!}{=} 6 - x$ . Dus moet $2x = 5$ , dus $x = 2\frac{1}{2}$ . En de rest kunnen we dan wel uitrekenen; we vinden het antwoord dat we al door proberen hadden gevonden.
Nu voor algemene $a$ , $b$ en $c$	We doen maar gewoon dezelfde stappen als in het voorbeeld. Om weg $c$ af te sluiten moet gelden dat $y = c - x$ . Om vervolgens weg $a$ af te sluiten moet dan gelden dat $z = a - y = a - (c - x) = a - c + x$ . Maar sluiten $x$ en $z$ nu wel weg $b$ af? Dan moet $a - c + x \stackrel{!}{=} b - x$ . Dus moet $2x = b - a + c = -a + b + c$ , dus $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ .
En $y$ en $z$ ?	Hierboven staat al dat $y = c - x$ , dus $y = c - (-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = c + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ . En voor $z$ weten we al dat $z = a - y$ , dus $z = a - (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$ .
TERUGBLIKKEN Klopt het wel?	Laten we maar eens kijken wat we krijgen als we $a = 5$ , $b = 6$ , $c = 4$ invullen. Dan geldt dat $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = -\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 = -2\frac{1}{2} + 3 + 2 = 2\frac{1}{2}$ . Dat klopt met wat we eerder hadden gevonden!
Kunnen we dat nog anders schrijven?	Ja, een net iets gemakkelijker vorm is $x = \frac{-a+b+c}{2}$ , $y = \frac{a-b+c}{2}$ , $z = \frac{a+b-c}{2}$ .
Wat zegt de formule voor $x$ eigenlijk in termen van de 'input'?	Je moet de breedtes van de wegen aan weerszijden van het hek bij elkaar op tellen en daar de breedte van het tegenoverliggende hek van aftrekken, en dan nog eens delen door 2.
Is het toeval dat die formules zo op elkaar lijken?	Nee; uitgaande van de formule voor $x$ hebben we net gezien hoe je het hek berekent aan de hand van de 'aanliggende' wegen en de 'overliggende' weg. Die formules voor $y$ en $z$ zijn dus gewoon precies hetzelfde!
Kunnen we het nu voor elke driesprong?	Ja, dat wel, vul die $a$ , $b$ en $c$ maar in. Maar als bijvoorbeeld $a = 3$ , $b = 5$ en $c = 9$ is het geen echte driesprong; dat kan natuurlijk niet want $3 + 5 = 8 < 9$ .
En zie je dat nog terug dan?	Ja, als we nu het $z$ berekenen komt daar uit: $z = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3+5-9}{2} = -\frac{1}{2}$ , maar dat zou wel een beetje raar zijn, een hek van $-\frac{1}{2}$ meter breed.
Zijn we nu helemaal tevreden?	Ja, we hebben het probleem helemaal opgelost; uitgaande van willekeurige breedtes kunnen we nu de groottes van de hekken berekenen.
Of kunnen we nog generaliseren?	Ja, dat kan op zich wel. We zouden nog kunnen kijken hoe het met een viersprong zit. Of zelfs een vijfsprong!

## Week 3: De hulpladder

Hoe je elkaar kunt helpen bij het oplossen van moeilijke problemen.

- Les 7: Presentaties per koppel over manieren van hulp bieden n.a.v. het huiswerk.
- Les 8: Probleem: waar is dat hokje gebleven, opdracht 9. Verder: Hoe geeft je docent je hulp? De theorie van de hulpladder.
- Les 9: Drie keer een casus om te oefenen in het beantwoorden van vragen van leerlingen. In drietallen in carrousel: A is leerling en denkt dat  $10 - (x + 2)$  hetzelfde is als  $12 - x$ . B is in de rol van leraar en probeert A tot ander inzicht te laten komen. C observeert o.a. hoe B helpt. Daarna draaien alle rollen eentje door, en wordt een leerling geholpen die denkt dat  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  gelijk is aan  $\frac{1}{5}$ . In de derde ronde gaat de ‘leraar’ in op het misverstand van de ‘leerling’ dat haakjes uitwerken in  $(a + b)^2$  leidt tot  $a^2 + b^2$ .

### Dossieropdracht B

*(bij aanvang van les 10 inleveren op papier; telt mee in beoordeling)*

- a) Maak de opdrachten 10, 11, 12 en werk ze uit.
- b) Kies één van deze drie opdrachten (10, 11 of 12) uit om volledig uit te werken volgens de theorie van Polya. Maak dus twee kolommen en beschrijf stapsgewijs in de linkerkolom wat je rechts aan het doen bent. De fases van Polya vind je bij week 2.
- c) Maak opdracht 13. Met het door jou verzonnen raadsel bij opdracht 13(c) gaan we in les 10 en 11 aan de slag!

## De hulpladder

Nr.	Doel	Leraarshandeling	Vragen
1	Verwachting wekken	Niets doen, vragend aankijken	“Ja?” “En...?”
2	Leerling wordt bewust van zijn leertaak	Vragen naar wat leerling moet doen	“Wat wil je weten?” “Wat moet je doen?”
3	Leerling wordt bewust gemaakt van zijn leertaak	Leertaak formuleren	“We moeten ...” “In de opgave staat dat je ...”
4	Ophalen van voorkennis	Vragen naar voorkennis	“Wat weet je al?” “Waar doet dit probleem je aan denken?”
5	Ophalen van voorkennis	Voorkennis formuleren	“Je weet al dat ...” “We hebben eerder gehad dat ...”
6	Spiegelen; introspectie	Helpen bij bewustwording	“Je zei net dat ...” “Je wilde ...”
7	Doorvragen	Helpen bij begripsvorming, positief kritische houding aannemen	“Ja?” “Waarom?” “Hoe weet je dat?” “Ben je daar zeker van?” “Is dat zo?”
8	Terugblikken; retrospectie	Helpen bij het zicht krijgen op wat de leerling heeft gedaan	“Wat hebben we nu gedaan?” “Wat heb je nu bereikt”
9	Hint geven	Gerichte aanwijzing geven	“Hebben we er wat aan als ...” “Zou je een hulplijn kunnen tekenen?” “Als je deze punten nu eens verbindt.”
10	Uitleggen maar niet helpen	Voordoet	



## Week 4: Feedback geven en krijgen

Over feedback geven, feedback krijgen en de feedbackregels.

- Les 10: Theorie van feedback geven en krijgen; de feedbackregels.
- Les 11: Carrousel in drietallen: A legt zijn raadsel voor aan B, B probeert hem op te lossen. C observeert het gesprek tussen A en B en geeft na afloop feedback.

### Huiswerk voor les 12

*(in tweetallen)*

Zoek een geschikt probleem om een activerende presentatie over te houden. Bronnen voor een geschikt probleem:

- Tijdschrift Pythagoras ([www.pythagoras.nu/mmmcms/public](http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public))
- Kangoeroewedstrijd ([www.math.kun.nl/kangoeroe](http://www.math.kun.nl/kangoeroe))
- Wiskunde Olympiade ([www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl))
- Vierkant voor Wiskunde ([www.vierkantvoorwiskunde.nl](http://www.vierkantvoorwiskunde.nl))
- praktische opdrachten in schoolboeken

We gaan volgende week in de les aan de voorbereiding van de presentatie werken; zorg dat je dus van te voren je probleem uitgekozen hebt. Overleg met je docent of het probleem geschikt is.

### Feedback geven

0	Sfeer van vertrouwen	"Wil je mijn reactie op ...?"
1a	Neutrale en concrete observaties (geen interpretaties)	"Ik zie, neem waar, hoor ..."
1b	Ruimte voor reacties	"Herken je dat? Klopt dat?"
2a	Subjectief, een persoonlijk beleven van de feedbackgever	"Dit komt op mij over als ..."
2b	Ruimte voor reacties	"Bedoel je het zo over te komen?"

## Feedback ontvangen

1	Luisteren naar feedback: ga niet in de verdediging;
2	Ingaan op feedback: vraag door om toelichting, alternatieven, ideeën, enz.
3	Vertalen van feedback: bedenk wat je concreet met de feedback gaat doen.

## Feedbackkaartje

Feedback
Van:
Voor:
Over: 1. Manier van presenteren 2. Hulp aan klasgenoten (hulpladder!)
Wat ging goed?
Waar een volgende keer op letten?
Vragen:

## Week 5: Lesvoorbereiding

- Les 12: Oefenen met resterende opdrachten 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Presentatietechnieken.
- Les 13: In tweetallen werken aan dossieropdracht C.
- Les 14: In tweetallen werken aan dossieropdracht C.

### Dossieropdracht C

*(bij aanvang van les 15 inleveren op papier; telt mee in beoordeling)*

Je gaat in tweetallen een les geven aan je groepsgenoten van maximaal 15 minuten. In die les presenteer je een probleem dat je groepsgenoten moeten oplossen. Je helpt ook je groepsgenoten bij de oplossing van het probleem.

a) Werk het probleem goed uit op papier.

b) Stel één of meer leerdoelen op voor je groepsgenoten. Wat moeten ze na afloop van je lesje kennen en wat moeten ze kunnen?

c) Maak een schema, waarin je vertelt wat je precies gaat doen, wat je groepsgenoten precies gaan doen en hoe lang alles gaat duren. Schrijf alles uitgebreid op: wat ga je precies zeggen, tekenen, voordoen? Wat is precies de bedoeling dat je groepsgenoten gaan doen? Hoe ga je hen daarbij helpen (zie de hulpladder). Het volgende schema kan hierbij handig zijn:

Tijdsduur	Wat doe ik	Wat doen “de leerlingen”
1 minuut	Ik introduceer het onderwerp op de volgende manier: ...	

## Week 6: Afsluiting

- Les 15: Afronden voorbereiding presentaties.
- Les 16: Uitloop.

In deze week zullen leerlingen van verschillende scholen elkaar afwisselend in de docentrol en de leerlingrol problemen voorleggen. Elke presentatie duurt 15 minuten (waaronder zelfwerkzaamheid door de groep!) en na afloop is er 5 minuten tijd voor een korte feedbackronde. De feedbackformulieren worden na afloop gekopieerd, zodat zowel de feedbackgever als de feedback-krijger de beschikking heeft over een formulier. De presentaties tellen mee bij de beoordeling, naast de dossieropdrachten A, B en C.

Deze gemeenschappelijke afsluiting zal worden gehouden op de Hogeschool Utrecht, Faculteit Educatie, Instituut Archimedes, Padualaan 97, Utrecht.

- Presentaties door de leerlingen in grotere groep op de Hogeschool Utrecht.
- Werken aan problemen van elkaar.
- Elkaar feedback geven met feedbackkaartje.

### Tot slot

Heb je plezier gekregen in het oplossen van zulk soort wiskundige problemen?

- In maart/april is elk jaar de Kangoeroewedstrijd.
- Eind januari is weer de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

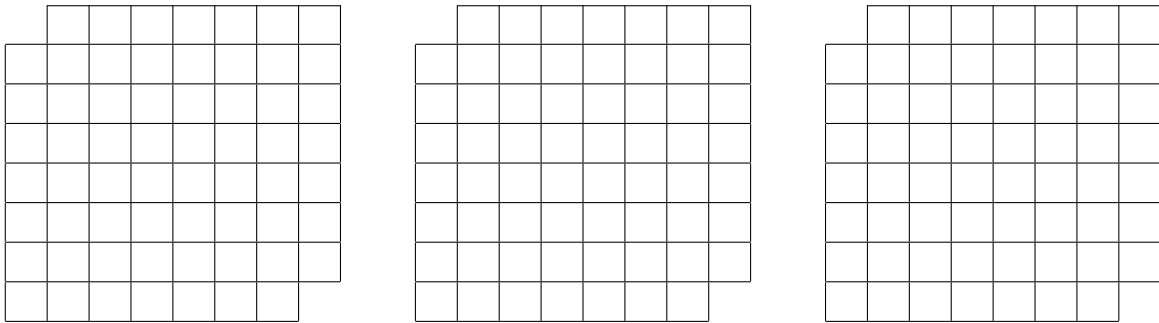
# Onderzoeksproblemen

## Opdracht 1 *Pijpleidingen*

Dertien steden moeten onderling met directe pijpleidingen worden verbonden. Hoeveel pijpleidingen moeten er worden aangelegd?

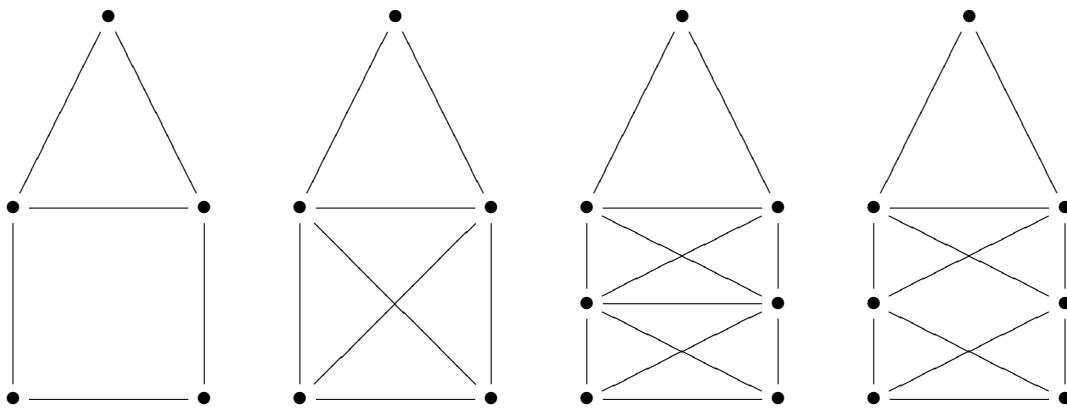
## Opdracht 2 *Schaakbord*

Dit bord bestaat uit  $8 \times 8 - 2 = 62$  hokjes. Is er een manier om het bord volledig te bedekken met 31 dominosteentjes (die elk afmetingen  $2 \times 1$  hebben)?



## Opdracht 3 *Huisje*

Onderzoek van elk huisje of het met een doorlopende potloodlijn volledig te tekenen is.



## Opdracht 4 *Kop/munt*

Je krijgt 10 muntstukken voor je te liggen; de helft 'kop' en de andere helft 'munt'. Helaas kun je ze niet zien, want je hebt een blinddoek voor. Verdeel de munten nu in twee stapeltjes, zodanig dat beide stapeltjes evenveel 'kop' bevatten.

## Opdracht 5 *Flessen wijn*

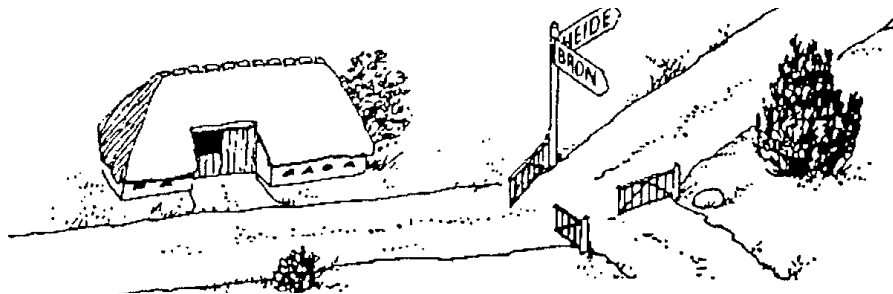
Twee identieke flessen wijn zitten allebei precies halfvol, de linker met witte wijn, de rechter

met rode wijn. Met een maatglaasje giet je een bepaalde hoeveelheid rode wijn bij de witte wijn. Na goed roeren wordt van dit mengsel een gelijke hoeveelheid teruggegoten. De vraag is nu: Zit er tenslotte meer rode wijn bij de witte dan witte bij de rode, of is het juist zo dat er meer witte wijn bij de rode zit dan rode bij de witte?

### Opdracht 6 *Hekkenprobleem*

Een kudde schapen wordt regelmatig verplaatst tussen stal, heide en bron. De weg naar de heide is 6 meter breed, de weg naar de bron 5 meter en de weg naar de stal 4 meter. Op een driesprong ontmoeten deze wegen elkaar. Elke weg kan met twee scharnierende hekken worden afgesloten.

- (a) Hoe groot moet elk van de drie hekken zijn, zodat elk tweetal hekken één weg kan afsluiten?
- (b) Als de wegen 2,40 meter, 3,60 meter en 5,20 meter zijn, hoe groot moeten de hekken dan zijn?
- (c) Los het probleem ook op als de wegen  $a$  meter,  $b$  meter en  $c$  meter breed zijn.
- (d) Nu voor een viersprong. Hoe groot moeten de hekken zijn als er vier wegen samenkomen met breedtes 3, 4, 5 en 4 meter? En met breedtes 3, 4, 5 en 6 meter? En voor willekeurige breedtes?
- (e) Nu voor een vijsprong. Hoe groot moeten de hekken zijn als er vijf wegen samenkomen met breedtes 3, 4, 5, 6 en 7 meter? En voor willekeurige breedtes?
- (f) Hoe zou het met een zesprong zitten?
- (g) Los het probleem ook op voor een  $n$ -hoekig verkeersplein, waarbij de wegen willekeurige breedten hebben.



### Opdracht 7 *Getallenmysterie 1*

Kies een getal tussen de 0 en 99. Trek de som van de cijfers ervan af. Kijk in de geheimecode-tabel welke letter hierbij hoort en houd die geheim.

Voorbeeld: je kiest 25. De som van de cijfers is dan  $2 + 5 = 7$ . Als je dat ervan aftrekt kom je uit op 18. Kijk nu in de tabel welke letter hierbij staat.

Doe dit nu dus ook voor het door jou gekozen getal. Je docent kijkt je diep in de ogen en weet feilloos welke letter je in gedachten hebt...

00:Q	01:L	02:K	03:A	04:B	05:R	06:K	07:W	08:A	09:Q	10:A	11:P	12:Z
13:C	14:P	15:M	16:Z	17:D	18:Q	19:M	20:V	21:B	22:P	23:Z	24:L	25:V
26:D	27:Q	28:N	29:X	30:E	31:S	32:N	33:P	34:C	35:S	36:Q	37:M	38:U
39:F	40:R	41:P	42:V	43:F	44:P	45:Q	46:T	47:F	48:T	49:P	50:N	51:T
52:G	53:T	54:Q	55:P	56:G	57:V	58:R	59:S	60:G	61:U	62:R	63:Q	64:S
65:H	66:P	67:R	68:S	69:H	70:X	71:S	72:Q	73:H	74:V	75:S	76:U	77:P
78:J	79:V	80:S	81:Q	82:J	83:Y	84:T	85:P	86:K	87:W	88:P	89:V	90:P
91:K	92:W	93:T	94:P	95:K	96:Z	97:V	98:W	99:P				

Doe dit nu ook voor een tweede getal. Gebruik daarvoor onderstaande tabel. Op welke letter ben je nu uitgekomen?

00:F	01:P	02:A	03:R	04:S	05:G	06:C	07:X	08:Q	09:F	10:H	11:A	12:E
13:G	14:N	15:B	16:Q	17:T	18:F	19:D	20:Z	21:P	22:A	23:G	24:K	25:Q
26:K	27:F	28:D	29:P	30:U	31:C	32:E	33:A	34:N	35:B	36:F	37:M	38:P
39:L	40:G	41:E	42:K	43:V	44:A	45:F	46:C	47:M	48:C	49:Q	50:P	51:F
52:M	53:Z	54:F	55:A	56:W	57:U	58:N	59:D	60:J	61:D	62:R	63:F	64:G
65:N	66:A	67:G	68:H	69:X	70:S	71:M	72:F	73:H	74:E	75:P	76:Q	77:A
78:Q	79:X	80:K	81:F	82:Y	83:T	84:P	85:G	86:E	87:F	88:A	89:R	90:T
91:R	92:S	93:L	94:C	95:Z	96:R	97:Q	98:H	99:A				

Ook nu weet je docent weer precies welke letter je in gedachten hebt. Hoe is dat mogelijk?

### Opdracht 8 Getallenmysterie 2

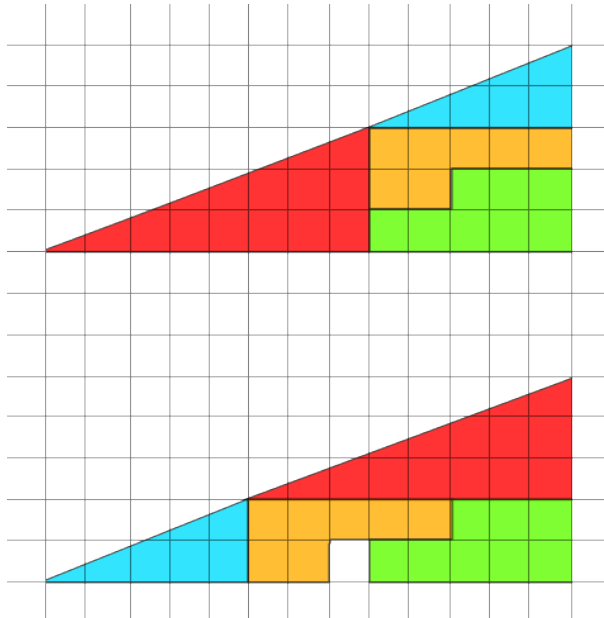
Kies nu een getal tussen de 10 en 99. Bereken het eerste min het tweede cijfer (dat kan een negatief getal opleveren) en tel de uitkomst bij het getal op. Kijk ook nu weer in de geheime-code-tabel welke letter hierbij hoort en houd die geheim.

Voorbeeld: je kiest 25. Het verschil van de cijfers is dan  $2 - 5 = -3$ . Als je dat er bij optelt kom je uit op 22. Kijk nu in de tabel welke letter hierbij staat.

Doe dit nu dus ook voor het door jou gekozen getal. Wat valt je op in beide tabellen?

### Opdracht 9 Missende hokje

Je ziet een afbeelding van twee figuren. Beide figuren zijn opgebouwd uit verschillende puzzelstukken A, B, C en D. Waar komt dat extra hokje vandaan?



**Opdracht 10 Heel veel enen**

Het getal  $M$  bestaat uit 2007 enen achter elkaar geschreven,  $M = \underbrace{111\dots111}_{2007\times}$ . Wat is de som van de cijfers van het getal dat je krijgt als je  $M$  vermenigvuldigt met 2007?

**Opdracht 11 Gemiddelde snelheid**

Op de weg van  $A$  naar  $C$  ligt  $B$  precies in het midden. De afstand van  $A$  naar  $C$  is 200 km. Een auto rijdt van  $A$  naar  $B$  met een snelheid van 120 km per uur en vervolgens van  $B$  naar  $C$  met een snelheid van 80 km per uur. Hoe snel rijdt de auto gemiddeld?

**Opdracht 12 Zuinige auto**

Jan heeft een auto die 1 op 12 rijdt. Dat betekent: op elke liter benzine rijdt hij 12 km. Ali beweert dat zijn auto 25% zuiniger rijdt. Eén op hoeveel rijdt zijn auto dan?

**Opdracht 13 Leeftijd**

(a) Piet is 2 jaar ouder dan Truus en Truus is weer 2 jaar ouder dan Sanne. Samen zijn ze 45 jaar. Hou oud zijn ze?

(b) Twee jaar geleden was mijn 12 jaar oudere broer precies twee keer zo oud als ik nu ben. Hoe oud ben ik?

(c) Bedenk zelf één of meer raadsels met leeftijden. Schrijf ze op. Probeer je eigen raadsel(s) op te lossen. Ruil één van jouw raadsels met een andere leerling. Los het raadsel op. Bespreek samen elkaars raadsels én de oplossingsmethoden.



### Opdracht 14 Klimgetallen

Een klimgetal is een getal zoals 2478 waarin elk cijfer groter is dan zijn voorganger. Hoeveel klimgetallen van lengte vier zijn er bestaande uit de cijfers 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

### Opdracht 15 Magisch vierkant

In een magisch vierkant zijn de drie rijssommen, de drie kolom-sommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een rijssom is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde  $3 \times 3$ -magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld.

Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?

		7
?		
	10	3

### Opdracht 16 Hond

Jan laat zijn hond uit. Hij is nog 1 km van huis. Terwijl hij met een snelheid van 5 km per uur naar huis loopt, holt de hond met een snelheid van 15 km per uur naar huis, dan weer terug naar z'n baasje (die inmiddels een stuk dichterbij huis is), dan weer naar huis, dan weer terug, en zo als maar verder. Hoeveel km legt de hond uiteindelijk af?

### Opdracht 17 Geen haar op m'n hoofd...

Amsterdam heeft 750 duizend inwoners. Ieder mens heeft hooguit 100.000 haren op het hoofd. Bewijs dat er in Amsterdam zeker 8 mensen zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.

### Opdracht 18 Verjaardagen

Bewijs dat er dit jaar in een groepje van 15 mensen er altijd twee jongens of twee meisjes op dezelfde dag van de week jarig zijn (bijv. twee jongens op dinsdag of twee meisjes op zaterdag).

### Opdracht 19 Paartjes

Laat gegeven zijn 51 verschillende getallen uit  $\{1, \dots, 100\}$ .

- Bewijs dat er een tweetal is met som 101.
- Bewijs dat er twee buurgetallen zijn (zoals 28 en 29).
- Bewijs dat er een tweetal is met verschil 50.

### Opdracht 20 Koord

Een lang koord van 40000 km zit om de aarde heen op de evenaar. Je voegt 1 meter koord toe. Daardoor kun je het koord overal een stukje van de grond tillen. Hoever?

### Opdracht 21 Driehoeken

In de figuur is een aantal hoeken in termen van  $x$  gegeven. Hoeveel graden is de waarde van  $x$ ?

